

Knobelaufgabe Mathematikwettbewerb, Sommersemester 2017

Liebe Knobelfreunde,

in diesem Semester wollen wir uns mit einigen falschen Rechenregeln beschäftigen. Und zwar sind wir auf der Suche nach Beispielen, bei denen die Anwendung einer falschen Rechenregel doch zu einem richtigen Ergebnis führt.

1. Frage:

Gibt es natürliche Zahlen a und b , also $a, b \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, sodass die folgende Gleichung gilt? Wenn ja, gibt es mehrere Beispiele?

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

2. Frage:

Gibt es natürliche Zahlen a und b , sodass die folgende Gleichung gilt? Wenn ja, gibt es mehrere Beispiele?

$$\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$$

3. Frage:

Gibt es natürliche Zahlen a und b , sodass die folgende Gleichung gilt? Wenn ja, gibt es mehrere Beispiele?

$$e^{a+b} = e^a + e^b$$

4. Frage:

Gibt es natürliche Zahlen a, b, c, d , sodass die folgende Gleichung gilt? Wenn ja, gibt es mehrere Beispiele?

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

5. Frage:

Gibt es natürliche Zahlen a, b, c, d , sodass die folgende Gleichung gilt? Wenn ja, gibt es mehrere Beispiele? Gibt es Beispiele, bei denen die beiden Brüche a/b und c/d vollständig gekürzt sind?

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Wir freuen uns über Einsendungen, auch wenn Sie nur eine einzige Frage beantworten.

Abgabe der Lösungen: Bitte schicken Sie Ihre Lösungen per Mail an Prof. Dr. Joachim Gaukel.

Abgabeschluss: Montag, 17. April 2017

Preisverleihung: Im Rahmen des Kolloquiums der Fakultät Grundlagen am Mittwoch, den 26. April um 17 Uhr an der Hochschule Esslingen, Standort Flandernstraße, Aula

Lösungen

Wir untersuchen die falsche Rechenregel $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Die Frage lautet, ob $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ möglich ist?

Richtig ist ja: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Also suchen wir ein Beispiel, bei dem $a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Was gleichbedeutend ist mit $0 = 2ab$

Das geht nur mit $a = 0$ oder $b = 0$

Wir untersuchen die falsche Rechenregel $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$

Die Frage lautet, ob $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ möglich ist?

Richtig ist ja: $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

Also suchen wir ein Beispiel, bei dem $\ln(a + b) = \ln(a \cdot b)$

Was gleichbedeutend ist mit $a + b = a \cdot b$ bzw. mit $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$

Das geht mit natürlichen Zahlen nur mit $a = 2$ und $b = 2$. Anders geht es nicht. Denn mit $a = 1$ oder $b = 1$ wird die Summe größer als Eins. Also muss $a, b > 1$ sein. Falls aber $a > 2$ oder $b > 2$, dann reicht es in der Summe nicht mehr auf Eins.

Wir untersuchen die falsche Rechenregel $e^{a+b} = e^a + e^b$

Die Frage lautet, ob $e^{a+b} = e^a + e^b$ möglich ist?

Richtig ist ja: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Also suchen wir ein Beispiel, bei dem $e^a \cdot e^b = e^a + e^b$

Was gleichbedeutend ist mit $1 = \frac{1}{e^b} + \frac{1}{e^a}$

Das geht mit natürlichen Zahlen a, b nicht, denn beide Summanden sind kleiner als $\frac{1}{2}$

Wir untersuchen die falsche Rechenregel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Die Frage lautet, ob $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ möglich ist?

Richtig ist ja $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Also suchen wir ein Beispiel, bei dem $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$

Was gleichbedeutend ist mit $(ad + bc)(b + d) = (a + c)bd$

Nachdem man die Klammern ausmultipliziert und zusammenfasst, ergibt sich $ad^2 + b^2c = 0$

Das geht nicht, denn wir haben positive Summanden.

Wir untersuchen die falsche Rechenregel $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

Die Frage lautet, ob $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ möglich ist?

Wenn man den Hauptnenner bildet und noch umformt, ergibt sich $ad^2 = 2bcd - b^2c$

Was gleichbedeutend ist mit $a = \frac{bc(2d-b)}{d^2}$

Das geht. Man wähle b, d beliebig. Dann wähle man c so, dass beim Teilen eine natürliche Zahl entsteht. Und dann berechnet man a .

Z.B. $b = 3, d = 5$. Dann betrachte man $a = \frac{3 \cdot c \cdot 7}{25}$. Nun wähle man $c = 25$. Dann ergibt sich $a = 21$ und somit

$$\frac{21}{3} - \frac{25}{5} = \frac{-4}{-2}$$

Weitere Beispiele sind : $\frac{3}{1} - \frac{4}{2} = \frac{-1}{-1}$ oder $\frac{3}{7} - \frac{4}{14} = \frac{-1}{-7}$

Alle genannten Beispiele führen auf ungekürztes $\frac{c}{d}$

Warum klappt nur für ungekürzte Fälle $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

$$a = \frac{bc(2d-b)}{d^2}$$

Ein Primteiler p von d muss doppelt im Zähler stecken.

p kann nicht in c stecken, sonst ist $\frac{c}{d}$ nicht gekürzt.

Wenn p nicht in b steckt, dann auch nicht in $(2d-b)$. Denn $2d$ ist ein Vielfaches von p und „ein Vielfaches von p “ minus „ein nicht-Vielfaches von p “ ergibt „ein nicht-Vielefaches von p “.

Dann käme p aber gar nicht im Zähler vor.

Also muss p in b stecken (in gleicher Vielfachheit).

Weil das für alle Primfaktoren von d der Fall ist und auch für alle Potenzen der Primfaktoren, stecken alle Primfaktoren mit Potenzen von d auch in b . Dann aber muss b ein Vielfaches von d sein.

b kann nicht das Einfache von d sein, sonst würde bei der falschen Rechenregel auf der rechten Seite im Nenner $b-d$ (gleich Null) stehen.

b kann nicht das Doppelte von d sein, sonst ergäbe sich für a wegen $a = \frac{bc(2d-b)}{d^2}$ der Wert Null.

b kann nicht das Dreifache/Vierfache/Fünffache/... von d sein, sonst ergäbe sich für a ein negativer Wert.

Also gibt es kein vollständig gekürztes Beispiel